

Trigonometria Megoldások

1) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\cos^2 x + 4 \cos x = 3 \sin^2 x$$

(12 pont)

Megoldás:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (1 \text{ pont})$$

$$\cos^2 x + 4 \cos x = 3(1 - \cos^2 x) \quad (2 \text{ pont})$$

$$4 \cos^2 x + 4 \cos x - 3 = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletével megoldva a fenti egyenletet, a gyökök:

$$\cos x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} \quad (1 \text{ pont})$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ vagy } \cos x = -\frac{3}{2} \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Ha } \cos x = \frac{1}{2}, \text{ akkor } \begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x_2 &= \frac{5\pi}{3} + k2\pi \end{aligned} \quad (3 \text{ pont})$$

$$\text{ahol } k \in \mathbb{Z} \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Ha } \cos x = -\frac{3}{2}, \text{ akkor nincs megoldás, hiszen } \cos x \geq -1, \text{ minden } x \text{ esetén.} \quad (2 \text{ pont})$$

Az egyenlet megoldása közben ekvivalens átalakításokat végeztünk, így mindkét gyöksorozat megoldása az eredeti egyenletnek. (1 pont)

Összesen: 12 pont

2) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

$$\text{a) } \log_3(\sqrt{x+1} + 1) = 2, \text{ ahol } x \text{ valós szám és } x > -1 \quad (6 \text{ pont})$$

$$\text{b) } 2 \cos^2 x = 4 - 5 \sin x, \text{ ahol } x \text{ tetszőleges forgásszöget jelöl} \quad (11 \text{ pont})$$

Megoldás:

a) *Lásd: Exponenciális és logaritmikus feladatok 1. feladat*

$$\text{b) } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{ helyettesítéssel,} \quad (1 \text{ pont})$$

$$2 - 2 \sin^2 x + 5 \sin x - 4 = 0 \quad (1 \text{ pont})$$

$$\sin x = y \text{ új változóval } 2y^2 - 5y + 2 = 0. \quad (1 \text{ pont})$$

$$y_1 = 2; y_2 = \frac{1}{2} \quad (2 \text{ pont})$$

$$y_1 \text{ nem megoldás, mert } |\sin x| \leq 1 \quad (1 \text{ pont})$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k2\pi \text{ vagy } x = \frac{5}{6}\pi + k2\pi \text{ (fokban is megadható)} \quad (3 \text{ pont})$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad (1 \text{ pont})$$

Ellenőrzés, vagy le kell írni, hogy a gyökök igazgá teszik az eredeti egyenletet, mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk. (1 pont)

Összesen: 17 pont

3) Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$ (6 pont)

b) $\sin^2 x = 2 \sin x + 3$ (6 pont)

Megoldás:a) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos feladatok 3. feladat*b) Legyen $\sin x = a$ Az $a^2 - 2a - 3 = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldani.Ennek az egyenletnek a gyökei: $a_1 = 3$ és $a_2 = -1$. (1 pont) $a = \sin x = 3$ nem ad megoldást, (1 pont)mert $\sin x \leq 1$ (1 pont) $a = \sin x = -1$ (1 pont)A $\sin x = -1$ egyenlet gyökei: $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$ (1 pont)**Ezek az x értékek kielégítik az egyenletet.** (1 pont)**Összesen: 12 pont****4) Mely valós számokra teljesül a $[0; 2\pi]$ intervallumon a $\sin x = \frac{1}{2}$ egyenlőség?** (2 pont)**Megoldás:**

$x_1 = \frac{\pi}{6}$ (1 pont)

$x_2 = \frac{5\pi}{6}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont**5) Adja meg az összes olyan forgásszöget fokokban mérve, amelyre a $k(x) = \frac{5}{\cos x}$ kifejezés nem értelmezhető! Indokolja a választát!** (3 pont)**Megoldás:**

A kifejezés nem értelmezhető, ha

$x = 90^\circ + n \cdot 180^\circ$, $n \in \mathbb{Z}$ (3 pont)

6) Határozza meg az alábbi egyenletek valós megoldásait!

a) $(\log_2 x - 3) \cdot (\log_2 x^2 + 6) = 0$ (7 pont)

b) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$ (10 pont)

Megoldás:a) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos feladatok 10. feladat*

b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ vagy $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ (2 pont)

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ vagy $x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ (2 pont)

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ vagy $x - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi$ (2 pont)

$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $x_2 = 2l\pi$; $x_3 = \pi + 2m\pi$; $x_4 = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$, $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$ (4 pont)

Összesen: 17 pont

7) Döntse el az alábbi két állítás mindegyikéről, hogy igaz vagy hamis!(2 pont)

a) Az $x \mapsto \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény periódusa 2π .

b) Az $x \mapsto \sin(2x)$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény periódusa 2π .

Megoldás:

a) igaz (1 pont)

b) hamis (1 pont)

Összesen: 2 pont

8) Oldja meg a valós számok halmazán a $\sin x = 0$ egyenletet, ha $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ (3 pont)

Megoldás:

A megoldások: $-2\pi; \pi; 0; \pi; 2\pi$. (3 pont)

9) Döntse el az alábbi négy állításról, hogy melyik igaz, illetve hamis!

A: Van olyan derékszögű háromszög, amelyben az egyik hegyesszög szinusza $\frac{1}{2}$ (1 pont)

B: Ha egy háromszög egyik hegyesszögének szinusza $\frac{1}{2}$, akkor a háromszög derékszögű. (1 pont)

C: A derékszögű háromszögnek van olyan szöge, amelynek nincs tangense. (1 pont)

D: A derékszögű háromszögek bármelyik szögének értelmezzük a koszinuszát. (1 pont)

Megoldás:

A: igaz (1 pont)

B: hamis (1 pont)

C: igaz (1 pont)

D: igaz (1 pont)

Összesen: 4 pont

10) Melyik szám nagyobb?

$A = \lg \frac{1}{10}$ vagy $B = \cos 8\pi$ (2 pont)

Megoldás:

A nagyobb szám betűjele: **B** ($= \cos 8\pi$) (2 pont)

11) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $5 - x = \sqrt{2x^2 - 71}$ (6 pont)

b) $\sin^2 x = 1 + 2\cos x$ (6 pont)

Megoldás:

a) Lásd: Abszolútértékes és gyökös kifejezések 6. feladat

b) A baloldalon a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ helyettesítést elvégezve kapjuk:
 $1 - \cos^2 x = 1 + 2\cos x$ (1 pont)

$\cos^2 x + 2\cos x = 0$ (1 pont)

$\cos x(\cos x + 2) = 0$ (1 pont)

Ha $\cos x = 0$, akkor $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. (2 pont)

A $\cos x + 2 = 0$ egyenletnek nincs megoldása (mert $\cos x = -2$ nem lehetséges). (1 pont)

Összesen: 12 pont

12) Határozza meg a radiánban megadott $\alpha = \frac{\pi}{4}$ szög nagyságát fokban! (2 pont)

Megoldás:

$\alpha = 45^\circ$ (2 pont)

13)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az $\frac{x+2}{3-x} \geq 0$ egyenlőtlenséget! (7 pont)

b) Adja meg az x négy tizedesjegyre kerekített értékét, ha $4 \cdot 3^x + 3^x = 20$. (4 pont)

c) Oldja meg a $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$ egyenletet a $[-\pi; \pi]$ alaphalmazon. (6 pont)

Megoldás:

a) Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 11. feladat

b) Lásd: Exponenciális és logaritmikus feladatok 19. feladat

c) (A megadott egyenlet $\cos x$ -ben másodfokú,) így a megoldóképlet felhasználásával (1 pont)

$\cos x = 0,5$ vagy $\cos x = -2$. (2 pont)

Ez utóbbi nem lehetséges (mert a koszinuszfüggvény értékkészlete a $[-1; 1]$ intervallum). (1 pont)

A megadott halmazban a megoldások: $-\frac{\pi}{3}$, illetve $\frac{\pi}{3}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

14) Adja meg azoknak a 0° és 360° közötti α szögeknek a nagyságát, amelyekre igaz az alábbi egyenlőség!

$\cos \alpha = \frac{1}{2}$ (2 pont)

Megoldás:

$\alpha_1 = 60^\circ$ (1 pont)

$\alpha_2 = 300^\circ$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

15) Adja meg azoknak a 0° és 360° közötti α szögeknek a nagyságát, amelyekre igaz az alábbi egyenlőség! (2 pont)

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Megoldás:

A számológépbe beírva 1 megoldást kapunk

$\alpha_1 = 45^\circ$ (1 pont)

Viszont van egy másik megoldás is

$$180^\circ - \alpha_1 = \alpha_2 \quad \alpha_2 = 135^\circ$$

(1 pont)

Összesen: 2 pont

16) Oldja meg a $[-\pi; \pi]$ zárt intervallumon a $\cos x = \frac{1}{2}$ egyenletet! (2 pont)

Megoldás:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}, \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} \quad (2 \text{ pont})$$

17) a) Egy háromszög oldalainak hossza 5 cm, 7 cm és 8 cm. Mekkora a háromszög 7 cm-es oldalával szemközti szöge? (4 pont)

b) Oldja meg a $[0; 2\pi]$ intervallumon a következő egyenletet!

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (6 \text{ pont})$$

c) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

I) Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ függvény páratlan függvény.

II) Az $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \cos 2x$ függvény értékkészlete a $[-2; 2]$ zárt intervallum.

III) A $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \cos x$ függvény szigorúan monoton növekszik

a $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon.

Megoldás:

a) (A kért szöveget α -val jelölve) alkalmazzuk a koszinusztételt: (1 pont)

$$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos \alpha \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Ebből } \cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad (1 \text{ pont})$$

azaz (mivel egy háromszög egyik szögéről van szó) $\alpha = 60^\circ$ (1 pont)

b) Ha $\cos x = \frac{1}{2}$, (1 pont)

akkor a megadott intervallumon $x = \frac{\pi}{3}$, vagy $x = \frac{5\pi}{3}$. (2 pont)

Ha $\cos x = -\frac{1}{2}$, (1 pont)

akkor a megadott intervallumon $x = \frac{2\pi}{3}$, vagy $x = \frac{4\pi}{3}$. (2 pont)

c)

I) igaz

II) hamis

III) hamis

(2 pont)

Összesen: 12 pont

18) Adja meg a következő egyenlet $[0; 2\pi]$ intervallumba eső megoldásának pontos értékét!

$$\sin x = -1$$

(2 pont)

Megoldás:

$$x = \frac{3}{2}\pi \quad (2 \text{ pont})$$

19) Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett $x \rightarrow 1 + \cos x$ függvény értékkészletét! (2 pont)

Megoldás:

A függvény értékkészlete: $[0; 2]$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

20) Adja meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 1 + \sin x$ függvény értékkészletét! (2 pont)

Megoldás:

Felírjuk a $\sin x$ függvény értékkészletét.

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

Ha az így kapott egyenlőtlenség minden oldalához hozzáadunk egyet, megkapjuk az $1 + \sin x$ függvény értékkészletét.

$$0 \leq 1 + \sin x \leq 2 \quad (2 \text{ pont})$$

Tehát a megoldás $[0; 2]$.

Összesen: 2 pont

21) Oldja meg a $\sin x = 1$ egyenletet a valós számok halmazán! (2 pont)

Megoldás:

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (2 \text{ pont})$$

Összesen: 2 pont

22) Mely x -ekhez rendel a $[0; 2\pi]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto \cos x$ függvény 0,5-öt? (2 pont)

Megoldás:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \text{ és } x_2 = \frac{5\pi}{3} \quad (2 \text{ pont})$$

Összesen: 2 pont

23) Oldja meg az alábbi egyenletet a $[0; 2\pi]$ intervallumon! (2 pont)
 $\cos x = 0,5$

Megoldás:

$$\text{Az egyenlet megoldásai: } x_1 = \frac{\pi}{3} \quad x_2 = \frac{5\pi}{3} \quad (2 \text{ pont})$$

Összesen: 2 pont

24) Adja meg azt a tompaszöget, amelynek a szinusza 0,5. (2 pont)

Megoldás:

A szinusz függvény a 0,5 értéket $30^\circ + k \cdot 360^\circ$ -nál és $150^\circ + k \cdot 360^\circ$ -nál veszi fel. Mivel tompaszöget keresünk, a megoldás a $150^\circ \left(= \frac{5}{6}\pi \right)$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

25) Egy középület akadálymentesítésekor a bejárathoz egyenletesen emelkedő rámpát építenek, hogy kerekesszékekkel és babakocsival is be

lehesen jutni az épületbe. A rámpa hossza 3 méter, és a járda szintjétől 60 centiméter magasra visz.

Hány fokos a rámpa emelkedési szöge? Megoldását részletezze! (3 pont)

Megoldás:

A szinusz definíciója szerint: $\sin \alpha = \frac{0,6}{3} = 0,2$. (2 pont)

Így a rámpa emelkedési szöge $\alpha \approx 11,5^\circ$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

26) Az ABC háromszög AB oldala 2 egység, BC oldala 3 egység hosszú. Ez a két oldal 120° -os szöget zár be egymással. Számítsa ki a háromszög AC oldalának hosszát! (2 pont)

Megoldás:

A koszinusztétel alapján:

$AC = \sqrt{2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos(120^\circ)} = \sqrt{19} \approx 4,36$ egység. (2 pont)

Összesen: 2 pont

27) Az $ABCDEFGH$ kocka élhosszúsága 6 cm.

a) Számítsa ki az ábrán látható $ABCDE$ gúla felszínét! (6 pont)

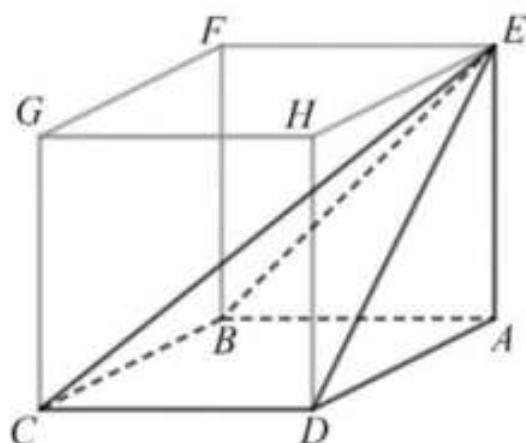
b) Fejezze ki az \overrightarrow{EC} vektort az \overrightarrow{AB} , az \overrightarrow{AD} és az \overrightarrow{AE} vektorok segítségével! (3 pont)

Egy 12 cm magas forgáskúp alapkörének sugara 6 cm.

c) Mekkora szöget zár be a kúp alkotója az alaplappal? (3 pont)

A fenti forgáskúpot két részre vágjuk az alaplap síkjával párhuzamos síkkal. Az alaplap és a párhuzamos sík távolsága 3 cm.

d) Számítsa ki a keletkező csonkakúp térfogatát! (5 pont)



Megoldás:

a) Lásd: Térgeometria 43. feladat

b) Lásd: Koordinátageometria 45. feladat

c) Készítsünk ábrát, amelyen α jelöli a kérdéses szöget!

(1 pont)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{6} = 2$$

(1 pont)

$$\alpha \approx 63,4^\circ$$

(1 pont)

d) Lásd: Térgeometria 43. feladat

